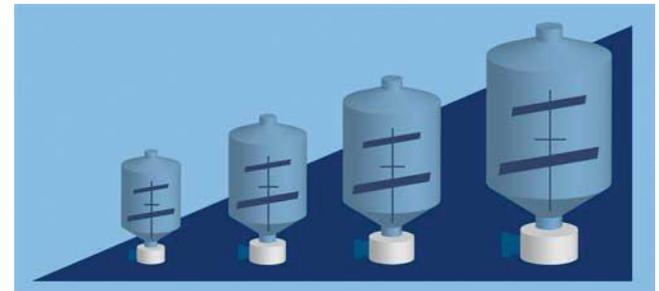


# *Analyse dimensionnelle:*

## *un outil pour raisonner les changements d'échelle*

**Guillaume Delaplace**



## ***Objectif de la présentation***

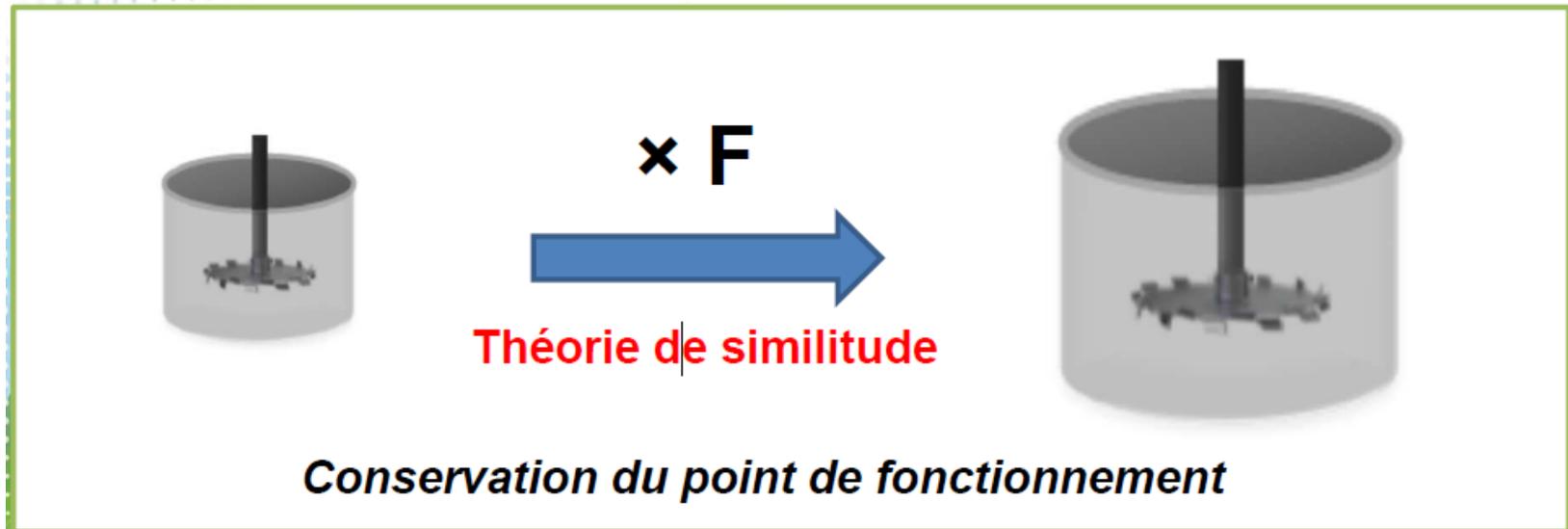
---

- ***Rappeler qu'il existe un certain nombre de règles/outils du GdP et certains écueils à éviter pour raisonner scientifiquement l'extrapolation***
- ***Illustrer pour deux cas (similitude totale ou similitude partielle) les potentialités de ses outils du GdP***

## *Principe/théorie de similitude*

---

La similitude aux deux échelles (F, facteur d'échelle )  
est garantie quand les points de fonctionnement des  
2 systèmes sont identiques



***Prérequis à satisfaire*** pour maîtriser le scale up /down: ***Evaluer des différences ou l'identité des points de fonctionnement***

---

1) Disposer de la ***configuration*** des 2 systèmes:  
«*i.e. Ensemble des nombres sans dimension ou mesures internes, responsables de l'évolution du système*»



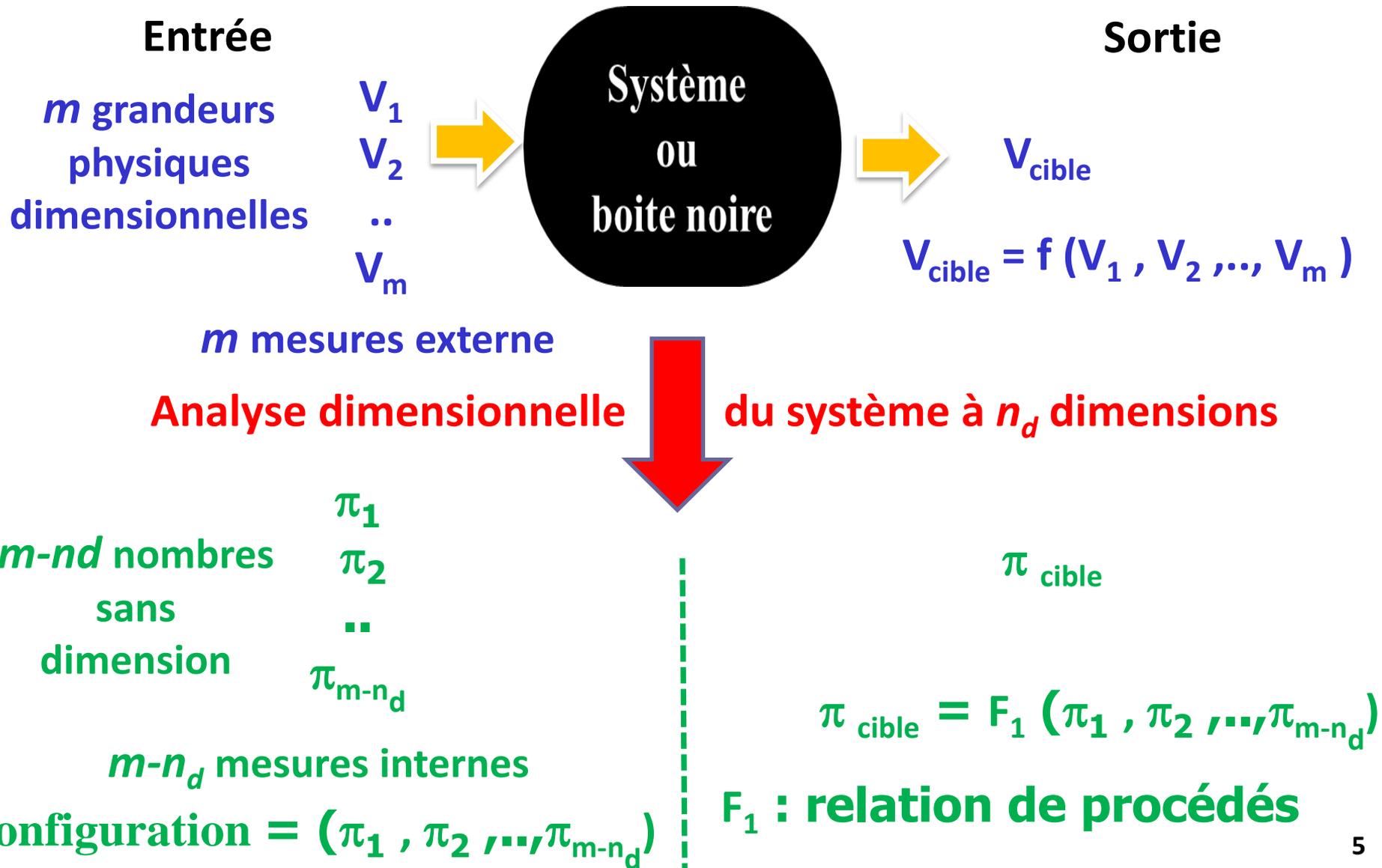
**Analyse dimensionnelle**

2) Comparer les ***points de fonctionnements*** calculés à partir des configurations  
«*i.e. Valeurs numériques prises par les nombres sans dimension des configurations en fonction des conditions de marches et tailles du prototype* »

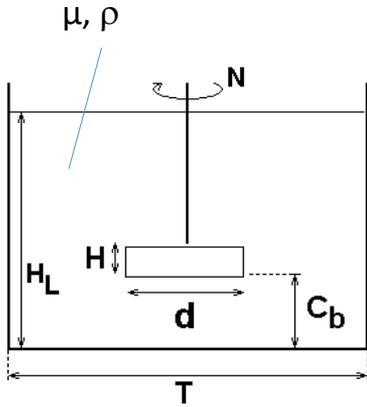


**2 scenarii possibles : Similitude complète ou partielle**

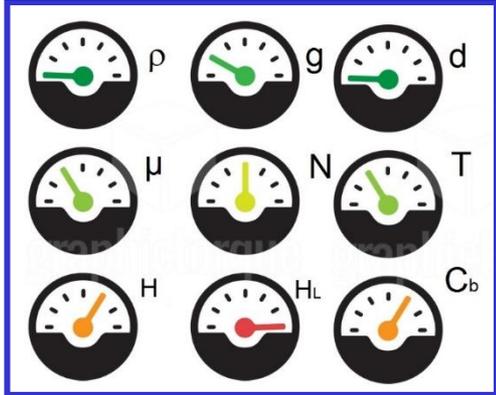
# Analyse Dimensionnelle: « une technique mathématique » pour établir la configuration du système



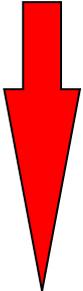
# Un Exemple: Configuration/point de fonctionnement d'un système « cuve agitée homogénéisant un fluide newtonien »



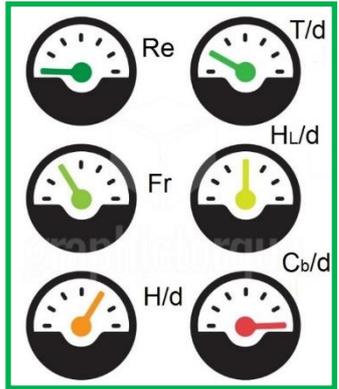
Variables dimensionnelles  
9 grandeurs physiques  
9 mesures externes



## Analyse Dimensionnelle



Nombres sans dimension  
6 mesures internes



Configuration

$$\left\{ \text{Re}, \frac{T}{d}, \text{Fr}, \frac{H_L}{D}, \frac{H}{d}, \frac{C_b}{d} \right\}$$



Point de fonctionnement

$$\{9, 10, 11, 12, 1, 3\}$$

*Vue synthétique de l'ensemble des mesures contrôlant l'évolution du système*

## « Configuration/Points de fonctionnement »: des outils d'aide à la décision

---

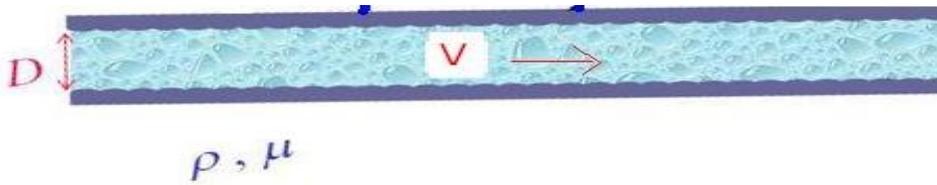
Quiconque qui fait de l'expérimentation sur maquette doit donc savoir formaliser le problème en nombres sans dimension pour raisonner la transposition des résultats obtenus à une autre échelle



Cadre théorique rigoureux pour statuer sur la reproductibilité des mécanismes à différentes échelles

# Pourquoi est il indispensable de passer par un formalisme avec des nombres sans dimensions ?

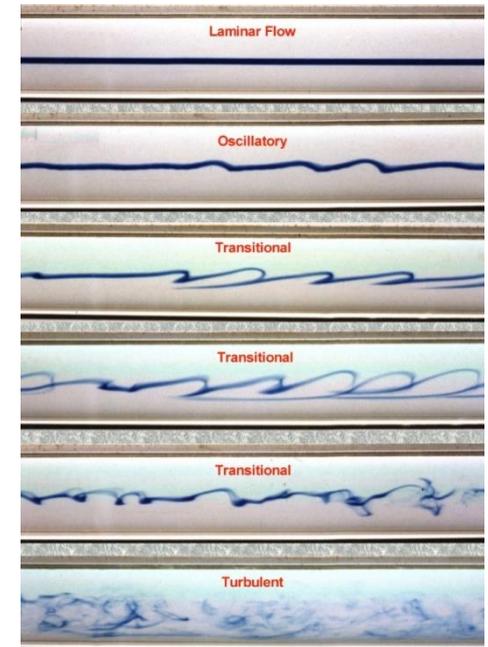
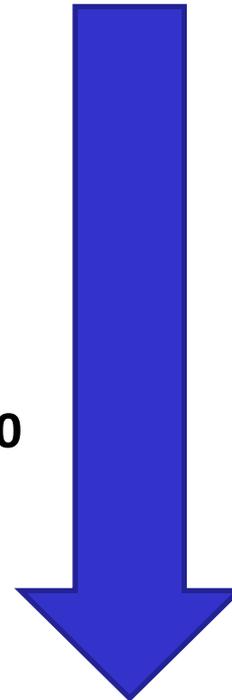
➔ Imposer des égalités sur des grandeurs dimensionnelles ne garantit pas forcément d'obtenir une unicité des mécanismes aux deux échelles



O. Reynolds (1842-1912) : Visualisation des régimes d'écoulement via dispersion d'un colorant

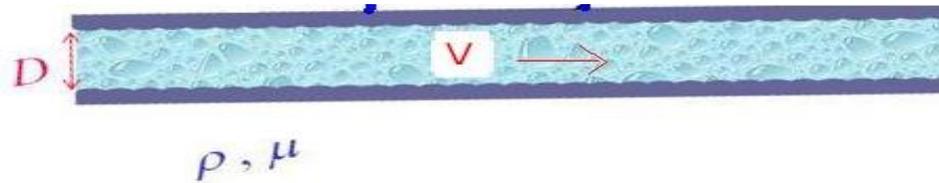
- Laminaire
  - $Re < 2\ 100$
- Transition
  - $2\ 100 < Re < 4\ 000$
- Turbulent
  - $Re > 4\ 000$

$$Re = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu}$$



# *Pourquoi est il indispensable de passer par un formalisme avec des nombres sans dimensions ?*

➔ Connaitre une corrélation entre des grandeurs physiques dimensionnelles ne nous renseigne pas sur son applicabilité à d'autres installations et d'autres conditions de marches



Taux de cisaillement en paroi:  $\gamma_p = 8 \frac{V}{D}$



**Besoin de situer le point de fonctionnement**

**du prototype**  $Re = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu} \leq 2100$

---

***Comment utiliser les configurations/points de fonctionnement pour réfléchir l'extrapolation?***

***2 exemples***

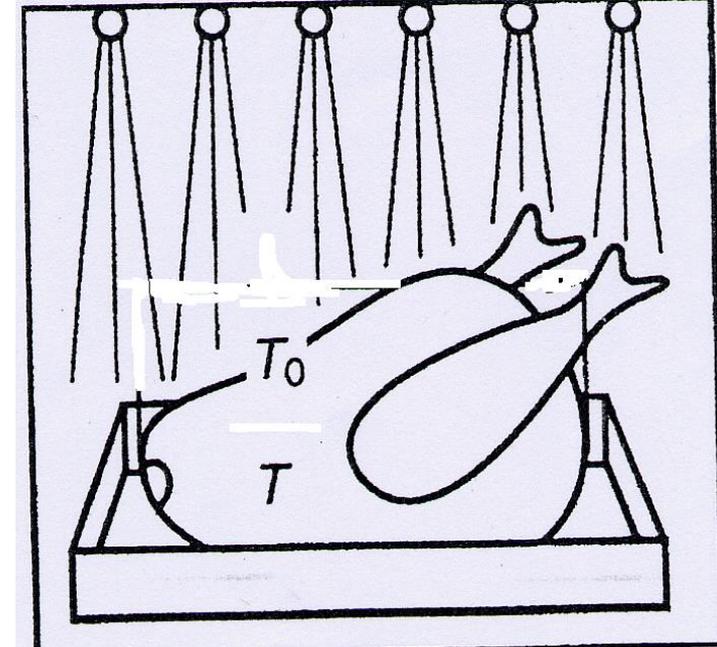
 **Similitude complète**

 **Similitude partielle**

# Cas de similitude totale: *Procédé de cuisson du poulet*

## Présentation du Procédé

- ❖ **Dispositif :**
  - Four
- ❖ **Produit :**
  - Poulet
- ❖ **Opération**
  - Cuisson



## Objectif de l'étude

- ❖ *Reproduire le procédé à l'identique quand la masse est multipliée par 2*
- ❖ Comment doit être modifié le temps de cuisson



*scale up*

## Etablissement de la configuration du système

Variable cible:  $T$ , température moyenne au coeur du poulet (état de cuisson)

### Liste des grandeurs physiques

- $A$  surface du poulet,  $m^2$
- $T_0$  température de peau (garantie par le four),  $^{\circ}C$
- $a$  diffusivité thermique  $=(\lambda/\rho C_p)$ ,  $m^2s^{-1}$
- $t$  temps de cuisson,  $s$
- ❖ **Hypothèse** : on admettra que 2 dindes de poids différents sont géométriquement similaires

$$T = f(T_0, a, t, A)$$

$$T/T_0 = F_1(a t/A)$$

Mise sous forme adimensionnelle

## Utilisation de la configuration du système

Conséquence du principe de similitude :

$$\text{Si } at/A = \text{idem} \quad \Rightarrow \quad T/T_0 = \text{idem}$$

Egalité des configurations :

$$(a t/A)_{\text{ech } 1} = (a t/A)_{\text{maquette}}$$

$$(a t/A)_{\text{maquette}} / (a t/A)_{\text{ech } 1} = 1 \quad \text{implique} \quad \left( \frac{t_{\text{ech}1}}{t_{\text{maquette}}} \right) = \frac{A_{\text{ech}1}}{A_{\text{maquette}}}$$

Or M proportionnel à  $\rho V = \rho L^3 = \rho A^{3/2}$

Donc A proportionnel à  $m^{2/3}$

$$\left( \frac{t_{\text{ech}1}}{t_{\text{maquette}}} \right) = \left( \frac{m_{\text{ech}1}}{m_{\text{maquette}}} \right)^{2/3}$$

**Le temps de cuisson doit croître de 1,58 quand la masse du poulet est multipliée par 2**

# Cas de similitude partielle: *Procédé d'émulsification en cuve agitée*

## Présentation du Procédé

### ❖ *Dispositif*

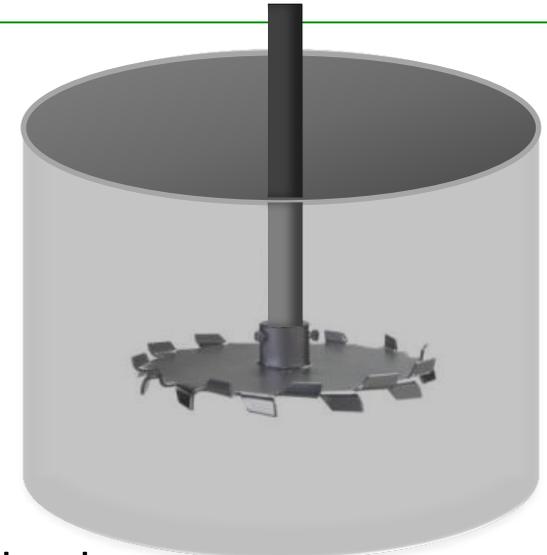
- Cuve à fond plat, sans chicane
- turbine défloculeuse, verticalement centrée

### ❖ *Produit :*

- eau + huile, non mélangées au départ

### ❖ *Opération*

- Dispersion de gouttelettes d'huile au sein de la phase aqueuse



## Objectif de l'étude

### ❖ *Mettre au point le procédé sur une maquette de laboratoire*

- Définir un ou des points de fonctionnement

### ❖ *Reproduire le procédé à l'identique à une échelle industrielle*



*scale up*

# Etablissement de la configuration du système

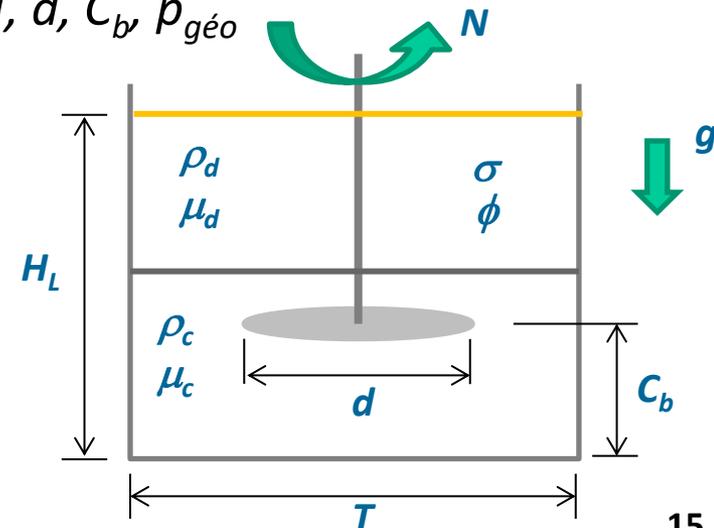
## Liste des grandeurs physiques

### ❖ Paramètres procédés:

- Vitesse de rotation de l'agitateur :  $N$
- durée de l'agitation :  $t$

### ❖ Conditions aux frontières et initiales :

- Géométrie de la cuve et de l'agitateur :  $T, d, C_b, \rho_{\text{géo}}$
- hauteur de produit dans la cuve :  $H_L$
- Accélération de la pesanteur :  $g$



# Etablissement de la configuration du système

$$d_{32} = f(\rho_c, \rho_d, \mu_c, \mu_d, \phi, \sigma, N, t, T, H_L, C_b, d, \{p_{géo}\})$$

**Analyse  
Dimensionnelle**

Matrice aux dimensions

Choix de la base des variables répétées  $(\rho_c, d, N)$

Matrice Résiduelle modifiée  $R_m$

Réarrangement des nombres sans dimension

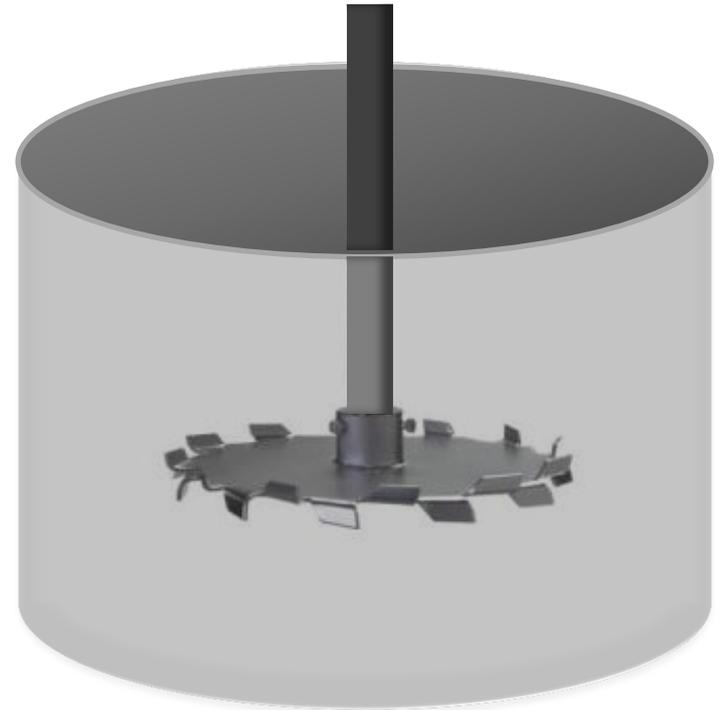
$$\pi_{cible} = \frac{d_{32}}{d} = F_2 \left( \begin{array}{l} \frac{\rho_d}{\rho_c}, \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = \mathbf{Re}, \frac{\mu_d}{\mu_c}, \phi, \\ \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = \mathbf{We}, N.t, \\ \frac{T}{d}, \frac{H_L}{d}, \frac{C_b}{d}, \frac{dN^2}{g} = \mathbf{Fr}, \{\pi_{géo}\} \end{array} \right)$$

## Echelle de la maquette



$$\frac{d_{32}}{d} = F_2 \left( \begin{array}{c} Re, We, Fr, \frac{\rho_d}{\rho_c}, \frac{\mu_d}{\mu_c}, \\ \phi, N.t, \frac{T}{d}, \frac{H_L}{d}, \frac{C_b}{d}, \{\pi_{géo}\} \end{array} \right)$$

## Echelle industrielle : prototype

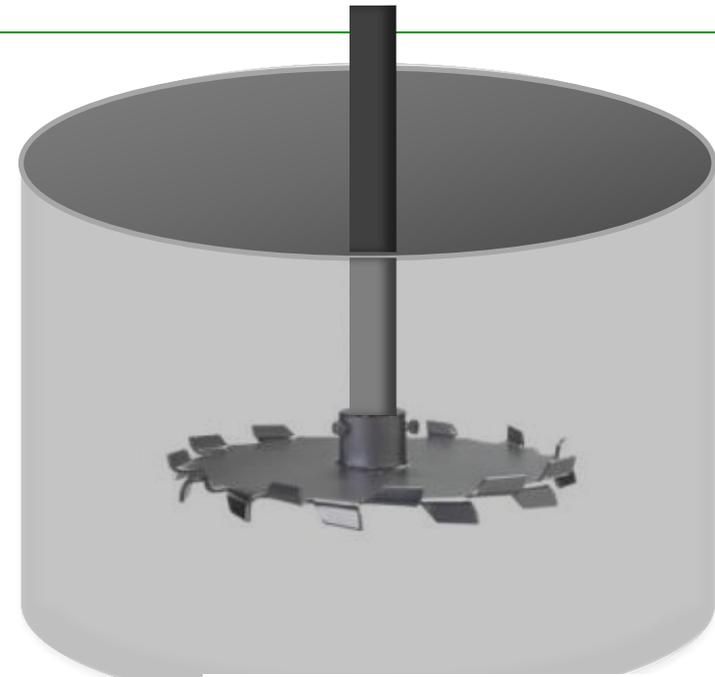


$$\frac{d_{32}}{d} = F_2 \left( \begin{array}{c} Re, We, Fr, \frac{\rho_d}{\rho_c}, \frac{\mu_d}{\mu_c}, \\ \phi, N.t, \frac{T}{d}, \frac{H_L}{d}, \frac{C_b}{d}, \{\pi_{géo}\} \end{array} \right)$$

# Changement d'échelle



- ❖ *Est-il possible de reproduire sur le prototype industriel un point de fonctionnement obtenu sur la maquette ?*
- ❖ *Peut-on conserver simultanément aux deux échelles les valeurs de toutes les mesures internes ?*



**Similitude complète ?**

- ❖ *Peut-on avoir tout à la fois :*

$$Re = Re$$

$$We = We$$

$$Fr = Fr$$

$$N.t = N.t$$

$$\frac{\mu_d}{\mu_c} = \frac{\mu_d}{\mu_c}$$

$$\frac{\rho_d}{\rho_c} = \frac{\rho_d}{\rho_c}$$

$$\phi = \phi$$

$$\frac{T}{d} = \frac{T}{d}$$

$$\frac{H_L}{d} = \frac{H_L}{d}$$

$$\frac{C_b}{d} = \frac{C_b}{d}$$

$$\{\pi_{géo}\} = \{\pi_{géo}\}$$



## Hypothèses de travail

### ❖ *Similitude géométrique : maquette semblable géométriquement au prototype*

- Facteur d'échelle :  $F_e = \frac{d}{d} = \frac{0,5}{0,05} = 10$
- Mêmes géométries :

$$\frac{T}{d} = \frac{T}{d} \quad \frac{H_L}{d} = \frac{H_L}{d} \quad \frac{C_b}{d} = \frac{C_b}{d} \quad \{\pi_{géo}\} = \{\pi_{géo}\}$$

### ❖ *Mêmes ingrédients aux deux échelles*

- $\rho_c = \rho_c, \rho_d = \rho_d, \mu_c = \mu_c, \mu_d = \mu_d, \phi = \phi, \sigma = \sigma$
- Et donc :  $\frac{\mu_d}{\mu_c} = \frac{\mu_d}{\mu_c} \quad \frac{\rho_d}{\rho_c} = \frac{\rho_d}{\rho_c}$

## Règles de similitude

Facteur d'échelle :  $F_e=10$

❖ Afin d'obtenir l'égalité des points de fonctionnement aux deux échelles :

$$1. \quad Re = \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = Re$$

$$2. \quad We = \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = We$$

$$3. \quad Fr = \frac{dN^2}{g} = \frac{dN^2}{g} = Fr$$

$$4. \quad N.t = N.t$$

#### Règles de similitude

Facteur d'échelle :  $F_e=10$

❖ Afin d'obtenir l'égalité des points de fonctionnement aux deux échelles :

1.  $Re = \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = Re \Rightarrow N = \frac{d^2}{d^2} N = F_e^{-2} N \Rightarrow N=0,01 N$
2.  $We = \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = We \Rightarrow N = \frac{d^{3/2}}{d^{3/2}} N = F_e^{-3/2} N \Rightarrow N=0,03 N$
3.  $Fr = \frac{d N^2}{g} = \frac{d N^2}{g} = Fr \Rightarrow N = \frac{d^{1/2}}{d^{1/2}} N = F_e^{-1/2} N \Rightarrow N=0,3 N$
4.  $N.t = N.t \Rightarrow t = \frac{N}{N} t$

## Règles de similitude

Facteur d'échelle :  $F_e=10$

❖ Afin d'obtenir l'égalité des points de fonctionnement aux deux échelles :

$$1. \quad Re = \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = \frac{\rho_c d^2 N}{\mu_c} = Re \quad \Rightarrow \quad N = \frac{d^2}{d^2} N = F_e^{-2} N \quad \Rightarrow \quad N=0,01 N$$

$$2. \quad We = \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = \frac{\rho_c d^3 N^2}{\sigma} = We \quad \Rightarrow \quad N = \frac{d^{3/2}}{d^{3/2}} N = F_e^{-3/2} N \quad \Rightarrow \quad N=0,03 N$$

$$3. \quad Fr = \frac{d N^2}{g} = \frac{d N^2}{g} = Fr \quad \Rightarrow \quad N = \frac{d^{1/2}}{d^{1/2}} N = F_e^{-1/2} N \quad \Rightarrow \quad N=0,3 N$$

$$4. \quad N.t = N.t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{N}{N} t$$

❖ La similitude complète n'est pas possible  $\Rightarrow$  **Similitude partielle**

$\Rightarrow$  **Impossibilité** de conserver simultanément les valeurs numériques de  $Re$ ,  $We$  ou  $Fr$  aux deux échelles

$\Rightarrow$  **Impossibilité** de reproduire un même point de fonctionnement aux deux échelles

## Analyse des choix

Facteur d'échelle :  $F_e = 10$

$N = 2000 \text{ tr/min}$

1.  $Re = Re$



$$N = F_e^{-2} N = 0,01 N$$



$$N = 20 \text{ tr/min}$$

$\rightarrow \begin{cases} We = F_e^{-1} We = 0,1 We \\ Fr = F_e^{-3} Fr = 0,001 Fr \end{cases}$

2.  $We = We$



$$N = F_e^{-3/2} N = 0,03 N$$



$$N = 63 \text{ tr/min}$$

$\rightarrow \begin{cases} Re = F_e^{1/2} Re = 3,16 Re \\ Fr = F_e^{-2} Fr = 0,01 Fr \end{cases}$

3.  $Fr = Fr$



$$N = F_e^{-1/2} N = 0,3 N$$



$$N = 632 \text{ tr/min}$$

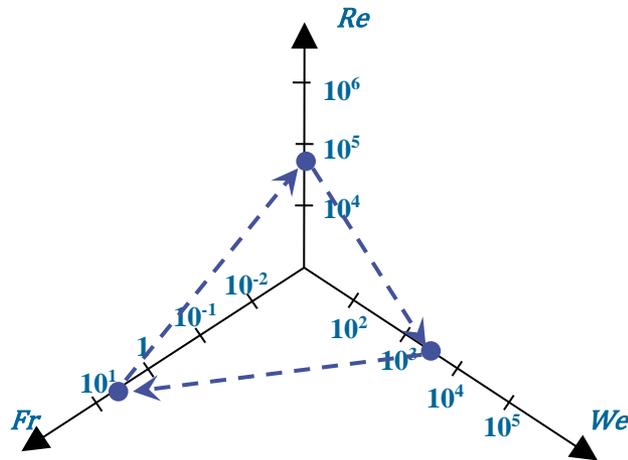
$\rightarrow \begin{cases} Re = F_e^{3/2} Re = 31,6 Re \\ We = F_e^2 We = 100 We \end{cases}$

$Re = Re$

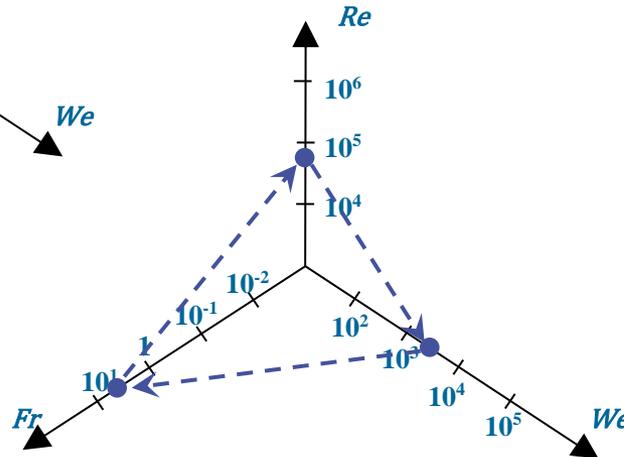
## Représentation graphique de la configuration

❖ Pour trois points de fonctionnement

$We = We$

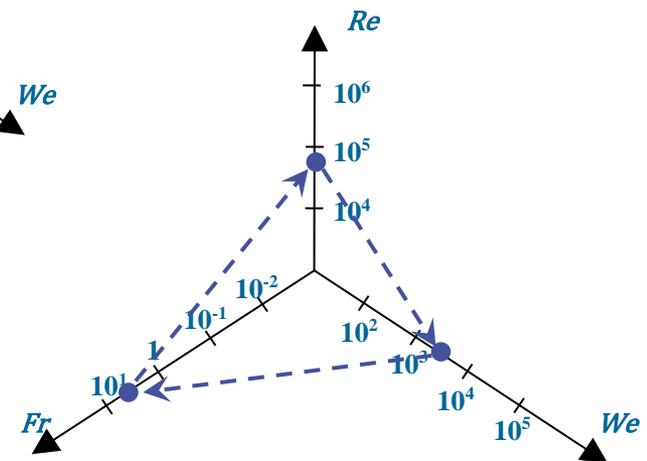


$$N = F_e^{-2} N = 0,01 N$$



$$N = F_e^{-3/2} N = 0,03 N$$

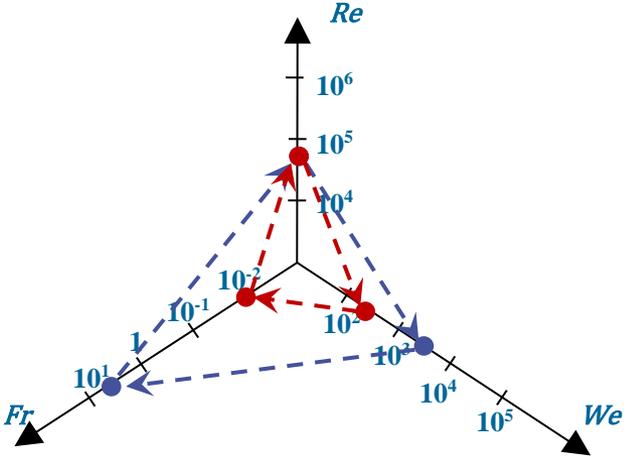
$Fr = Fr$



$$N = F_e^{-1/2} N = 0,3 N$$

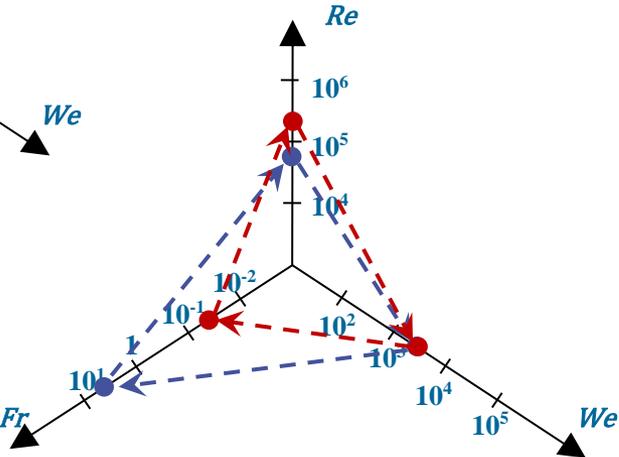
$Re = Re$

## Représentation graphique de la configuration



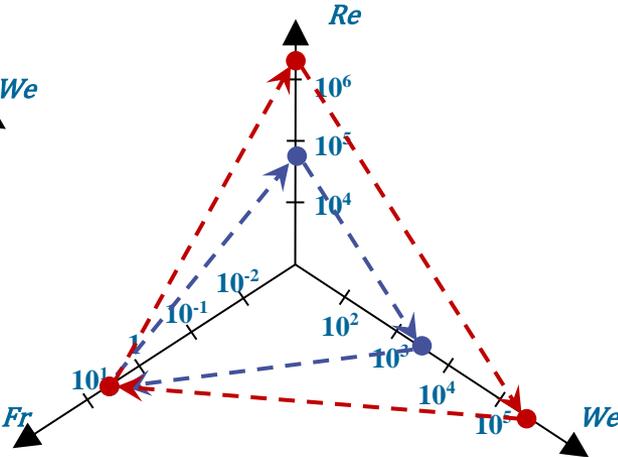
$$N = F_e^{-2} N = 0,01 N$$

$We = We$



$$N = F_e^{-3/2} N = 0,03 N$$

$Fr = Fr$



$$N = F_e^{-1/2} N = 0,3 N$$

*Comment choisir les conditions opératoires à l'échelle industrielles ?*

### *En cas de similitude partielle :*

- ❖ *Toutes les valeurs des mesures internes ne sont pas conservées*
- ❖ *Quel critère adopté/ invariant à retenir pour permettre la reproduction des points de fonctionnement ?*
- ❖ *Quel nombre sans dimension/invariant doit-on conserver en priorité ?*



*Analyser la relation de procédé*

- ❖ *Marche à suivre :*
  - Détermination de la relation de procédé grâce à des expériences menées sur maquette
  - Recherche de corrélations semi empiriques de la littérature

### Application au procédé d'émulsification

#### ❖ *Corrélations semi empiriques de la littérature :*

- corrélation de Calderbank (1958) pour agitateur à 4 pales

$$\frac{d_{32}}{d} = 0,06. (1 + \phi). We^{-3/5}$$

- corrélation de Brown et Petit (1970) pour une turbine Rushton à 6 pales :

$$\frac{d_{32}}{d} = 0,05. (1 + 3,14. \phi). We^{-3/5}$$

#### ❖ *On en déduit la forme de la relation procédé :*

- Avec les paramètres matières et géométriques fixés


$$\frac{d_{32}}{d} = C. We^{-3/5}$$



***Ce sont donc les valeurs de We qui impacte la valeur cible***

## Application au procédé d'émulsification

- ❖ *L'objectif industriel est de maintenir le même diamètre moyen des gouttelettes aux deux échelles :  $d_{32} = d_{32}$*
- ❖ *Les conditions à respecter lors du changement d'échelle sont donc :*
  1.  $d_{32} = d \cdot C \cdot We^{-3/5}$
  2.  $d_{32} = d \cdot C \cdot We^{-3/5}$ , avec  $C=C$
  3.  $d_{32} = d_{32}$
- ❖ *On écrit donc :*

$$\bullet \frac{d_{32}}{d_{32}} = 1 = \frac{d \cdot C \cdot We^{-3/5}}{d \cdot C \cdot We^{-3/5}} = \frac{d \cdot (N^2 \cdot d^3)^{-3/5}}{d \cdot (N^2 \cdot d^3)^{-3/5}}$$


$$\left(\frac{N}{N}\right)^{-6/5} \cdot F_e^{-9/5} \cdot F_e = 1$$


$$N = F_e^{-2/3} \cdot N = 431 \text{ tr/min pour } N=2000 \text{ tr/min}$$

## Synthèse des conditions opératoires à l'échelle industrielle

$$\text{❖ } N = F_e^{-2/3} \cdot N = 431 \text{ tr/min}$$

$$\text{❖ } T = F_e \cdot T = 10 \cdot T, \quad d = F_e \cdot d = 10 \cdot d, \quad C_b = F_e \cdot C_b = 10 \cdot C_b, \quad H_L = F_e \cdot H_L = 10 \cdot H_L, \\ W = F_e \cdot W = 10 \cdot W$$

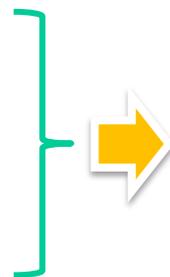
$$\text{❖ } \rho_c = \rho_c, \quad \rho_d = \rho_d, \quad \mu_c = \mu_c, \quad \mu_d = \mu_d, \quad \phi = \phi, \quad \sigma = \sigma$$

$$\text{❖ } t = F_e^{2/3} \cdot t = 4,7 \cdot t$$

$$\text{❖ } We = F_e^{5/3} \cdot We = 46,5 \cdot We$$

$$\text{❖ } Fr = F_e^{-1/3} \cdot Fr = 0,5 \cdot Fr$$

$$\text{❖ } Re = F_e^{4/3} \cdot Re = 21,5 \cdot Re$$



**les valeurs des mesures internes associées au point de fonctionnement du prototype sont très éloignées de leur valeur obtenue sur maquette**

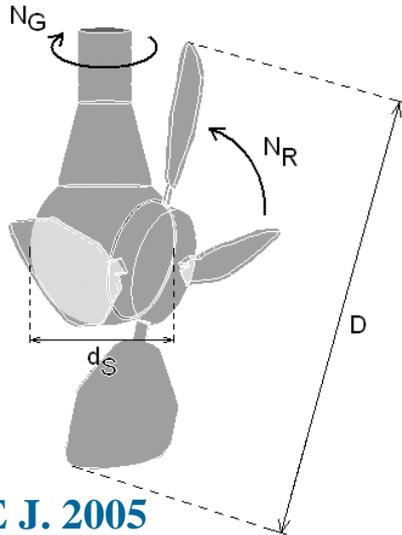


**La relation de procédé doit être établie à partir d'essais sur la maquette pour les gammes des mesures internes atteintes avec le prototype, pour valider l'identité des mécanismes**

- ❖ ***L'établissement de la configuration du système et calcul des points de fonctionnement est une condition nécessaire pour raisonner scientifiquement le changement d'échelle***
  
- ❖ ***En cas de similitude partielle***
  - La représentation graphique des points de fonctionnement permet
    - i) de mieux cerner quelles sont facteurs (les nombres sans dimension) expliquant des évolutions différentes des 2 systèmes
    - ii) De visualiser que le critère de transposition (invariant) choisi ne déplace pas trop le point de fonctionnement

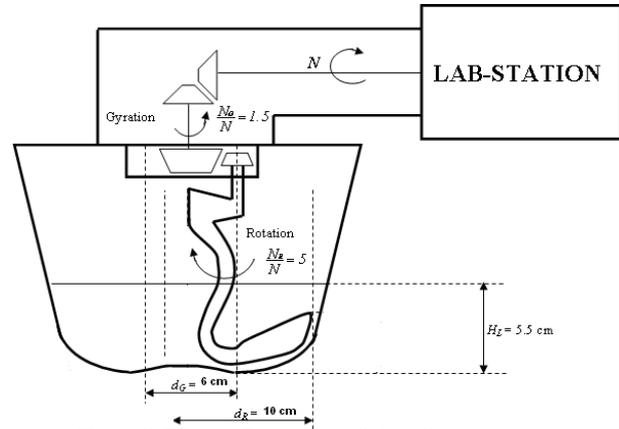
# Configurations de mélangeurs planétaires mélangeant liquides ou poudres

Différentes variables cibles: Puissance, temps de mélange, taux d'incorporation de gaz en fonction de la combinaison des vitesses



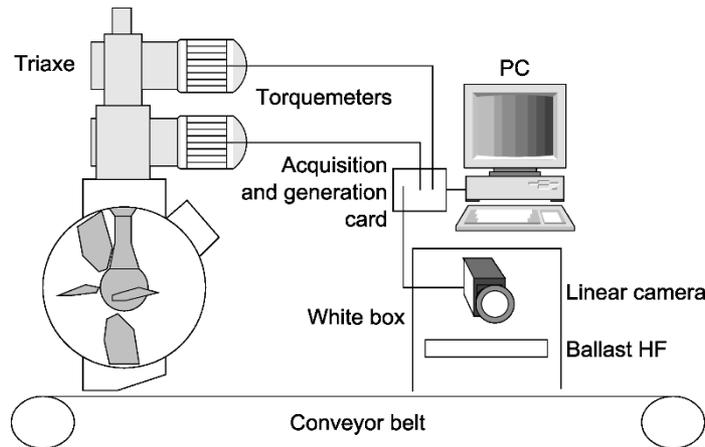
AIChE J. 2005

Chemical Engineering sci, 2007



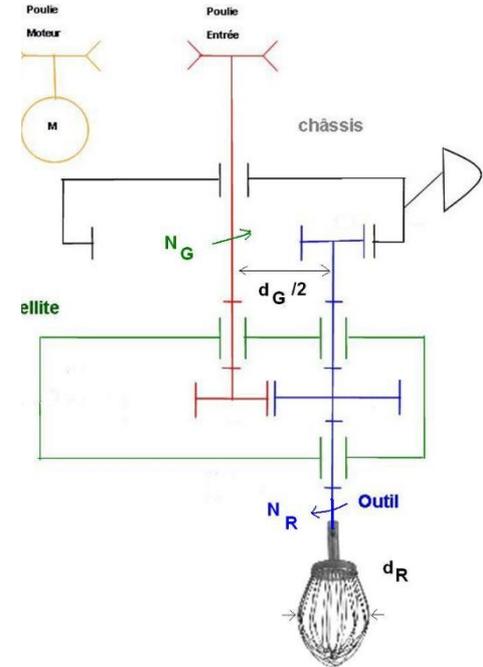
J. of Food eng. 2013

Chem Eng. Technol. 2015,



Chemical Engineering Journal, 2012

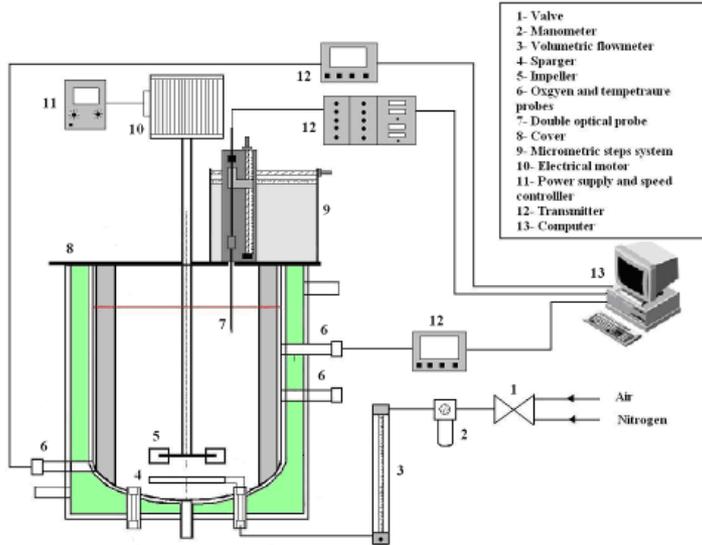
Powder Technology, 2014



J. of Food eng. 2012

# Relation de procédé sur le coefficient transfert de matière -cuve mécaniquement agitée aérée traitant des boues (non newtoniens)

$$T = H_L = 21.2 \text{ cm}, V_L = 7.4 \text{ L}$$



agitateur



Distributeur d'air

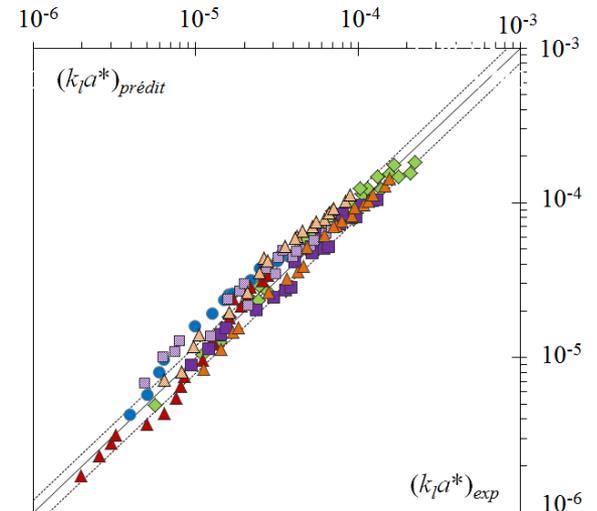
$$\mu_a = \frac{\mu_w}{1 + (t_w \cdot \gamma)^{1-n_w}}$$

variables cibles: taille des bulles

$$k_t a^* = 0.02109 \cdot (Fr \cdot U_g^*)^{2/3} \cdot (\mu^*)^{-0.591} \cdot (\sigma^*)^{-0.245} \cdot (n_{ost})^{-2.399} \cdot (t_w^*)^{-0.168}$$

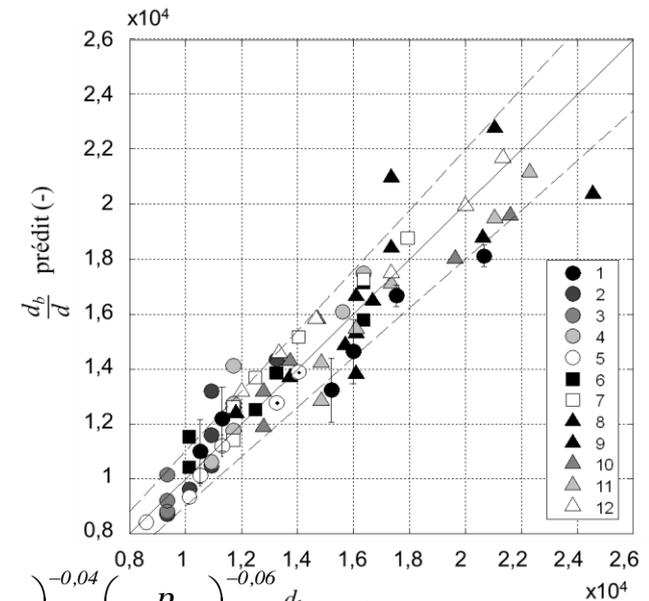
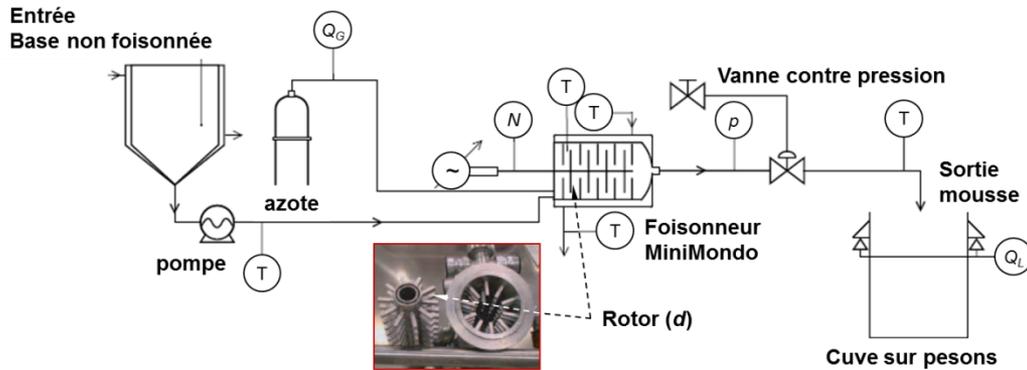
valid for  $\begin{cases} 0.096 < Fr < 2.4, & 0.0029 < U_g^* < 0.029, & 108 < \mu^* < 1.6 \cdot 10^6 \\ 847 < \rho^* < 1015, & Sc \approx 7850, & 0.28 < n_w < 1, & 3.8 \cdot 10^{-5} < t_w^* < 1 \end{cases}$

- ◆ water
- Gly50
- ▲ Gly70
- CMC4
- CMC6
- ▲ XG1
- ▲ XG2



# Configuration et relation de procédé lors du foisonnement de fluides Newtoniens et rhéofluidifiants

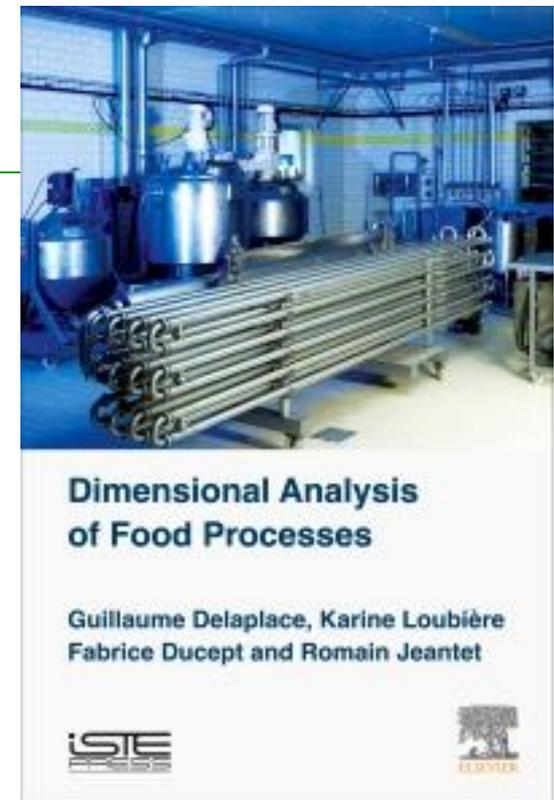
variables cibles: taille des bulles



$$\frac{d_b}{d} = 109 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{d^{0,5} \cdot N}{g^{0,5}} \right)^{-0,45} \left( \frac{\mu}{\rho \cdot d^{1,5} \cdot g^{0,5}} \right)^{-0,29} \left( \frac{\sigma}{\rho \cdot d^2 \cdot g} \right)^{0,16} \left( \frac{Q_L}{d^{2,5} \cdot g^{0,5}} \right)^{0,09} \left( \frac{Q_G}{d^{2,5} \cdot g^{0,5}} \right)^{-0,04} \left( \frac{p}{\rho \cdot d \cdot g} \right)^{-0,06} \frac{d_b}{d} \text{ expérimental (-)}$$



**Merci de votre attention  
Pour en savoir plus**



**G. Delaplace, INRA, UMET Lille**

**K. Loubière, CNRS, LGC Toulouse**

**F. Ducept, AgroParistech, Genial Massy**

**R. Jeantet, Agrocampus, Ouest Rennes**

**Sept 2015**

**Editions ISTE**

**Imprint: Elsevier**

**356 pages**

**Mai 2014**

**Collection TEC&DOC**

**Editeur: Lavoisier**

**464 pages**

## Principe de similitude

❖ *Pour garantir la reproduction à l'échelle industrielle, des mécanismes observés sur maquette :*

- Les configuration des deux systèmes doivent être constituées des mêmes mesures internes
- Toutes les mesures internes doivent avoir des valeurs identiques aux deux échelles :  $\pi_{i, \text{maquette}} = \pi_{i, \text{prototype}}$



**Similitude complète**

❖ *Si la valeur numérique d'une mesure interne n'est pas rigoureusement identique aux deux échelles :*

- l'identité de l'évolution de la mesure interne cible  $\pi_{\text{cible}}$  aux deux échelles n'est plus garantie



**Similitude partielle**